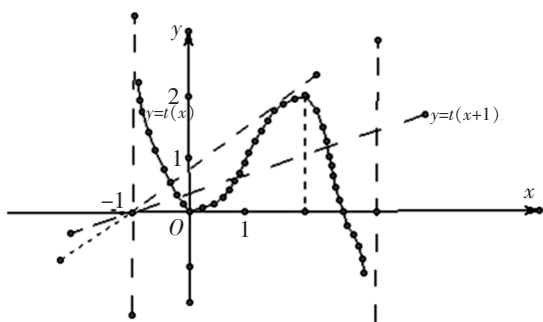


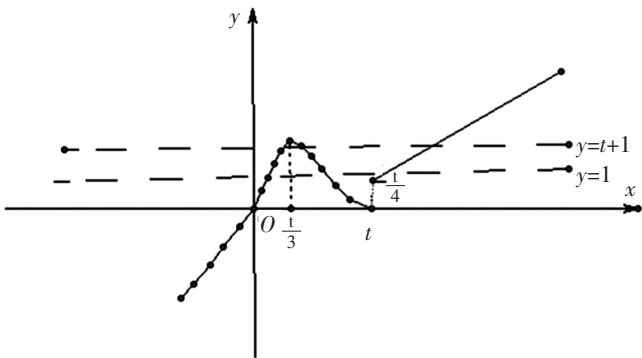


$f(x)=2-f(2-x)=2-\left[\frac{2}{f(\sqrt{2-x+1})}-2\right]=4-\frac{2}{f(\sqrt{3-x})}$. 又因为 $x \in (2, 3) \Rightarrow 0 < 3-x < 1$, 所以 $f(\sqrt{3-x})=3-x$, 则 $f(x)=4-\frac{2}{3-x}=\frac{2}{x-3}+4$. 画出函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-1, 3)$ 上的图像与函数 $y=t(x+1)$ 的图像, 由于直线 $y=t(x+1)$ 是过定点 $(-1, 0)$ 斜率是 t 的动直线, 数形结合可知: 当 $y=t(x+1)$ 与 $y=2-(x-2)^2$ 相切时, 即方程 $t(x+1)=2-(x-2)^2 \Rightarrow x^2+(t-4)x+t+2=0$ 有唯一解, 可求得 $t=6-2\sqrt{7}$, 故结合图像可知: 当 $0 < t < 6-2\sqrt{7}$ 时, 函数 $y=f(x)$ 在区间上 $(-1, 3)$ 的图像与直线 $y=t(x+1)$ 的图像有且只有三个不同的交点, 即定义在 $(-1, 3)$ 上的函数 $g(x)=f(x)-t(x+1)$ 有三个不同的零点, 应填答案 $(0, 6-2\sqrt{7})$.

【点评】解答本题的关键是充分运用题设条件先将函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-1, 3)$ 上的解析表达式求出来, 再画出其图像数形结合, 从而将问题转化为方程 $t(x+1)=2-(x-2)^2 \Rightarrow x^2+(t-4)x+t+2=0$ 有唯一解, 可求得 $t=6-2\sqrt{7}$, 通过数形结合, 求得当 $0 < t < 6-2\sqrt{7}$ 时, 函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-1, 3)$ 上的图像与直线 $y=t(x+1)$ 的图像有且只有三个不同的交点, 即定义在 $(-1, 3)$ 上的函数 $g(x)=f(x)-t(x+1)$ 有三个不同的零点.

【例 9】函数 $f(x)=\begin{cases} x(x-t)^2, & (x \leq t) \\ \frac{x}{4}, & (x > t) \end{cases}$ 其中 $t > 0$, 若函数 $g(x)=f[f(x)-1]$ 有 6 个不同的零点, 则实数 t 的取值范围是 _____.

【解析】由题设问题转化为 $g(x)=f[f(x)-1]=0$ 有六个不等



实数根, 由于函数 $f(x)=0$ 的零点是 $x=0, x=t$, 所以 $f(x)=1$ 或 $f(x)=t+1$. 因当 $x \leq t$ 时, $f(x)=x^3-2tx^2+t^2x$, 则 $f'(x)=3x^2-4tx+t^2=(3x-t)(x-t)$, 则 $x=\frac{t}{3}, x=t$ 是两个极值点, 且极大值为 $\frac{t^3}{27}$,

极小值为 0. 画出函数 $f(x)=\begin{cases} x(x-t)^2, & (x \leq t) \\ \frac{x}{4}, & (x > t) \end{cases}$ 的图像, 和直线 $y=$

$\begin{cases} \frac{t}{4} < 1, \\ t+1, y=1 \end{cases}$ 的图像, 结合函数的图像可知: 当 $\begin{cases} \frac{t}{4} < 1, \\ \frac{t^3}{27} > 1 \end{cases} \Rightarrow 3 < t < 4$

时, 两直线 $y=t+1, y=1$ 与函数 $y=f(x)$ 共有六个不同交点, 应填答案 $(3, 4)$.

【点评】解答本题的关键有两个: 其一是将函数的零点问题进行等价转化; 其二是要巧妙运用数形结合思想建立不等式组. 求解时还要综合运用导数知识确定函数的极值点和极值. 灵活运用所学知识和重要是数学思想进行分析问题和解决问题是本题一大特征, 体现了数学思想在解决数学问题中四两拨千斤的功能.

3. 复合函数零点问题

1. 复合函数定义: 设 $y=f(t), t=g(x)$, 且函数 $g(x)$ 的值域为 $f(t)$ 定义域的子集, 那么 y 通过 t 的联系而得到自变量 x 的函数, 称 y 是 x 的复合函数, 记为 $y=f[g(x)]$.

2. 复合函数函数值计算的步骤: 求 $y=g[f(x)]$ 函数值遵循“由内到外”的顺序, 一层层求出函数值.

例如: 已知 $f(x)=2^x, g(x)=x^2-x$, 计算 $g[f(2)]$.

【解析】 $f(2)=2^2=4, \therefore g[f(2)]=g(4)=12$.

3. 已知函数值求自变量的步骤: 若已知函数值求 x 的解, 则遵循“由外到内”的顺序, 一层层拆解直到求出的值. 例如: 已知 $f(x)=2^x, g(x)=x^2-2x$, 若 $g[f(x)]=0$, 求 x .

【解析】令 $t=f(x)$, 则 $g(x)=0 \Rightarrow t^2-2t=0$, 解得 $t=0, t=2$, 当 $t=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow 2^x=0$, 则 $x \in \emptyset$; 当 $t=2 \Rightarrow f(x)=2 \Rightarrow 2^x=2$, 则 $x=1$.

由上例可得, 要想求出 $g[f(x)]=0$ 的根, 则需要先将 $f(x)$ 视为整体, 先求出 $f(x)$ 的值, 再求对应的解, 这种思路也用来解决复合函数零点问题, 先回顾零点的定义.

4. 函数的零点: 设 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在 $x_0 \in D$, 使得 $f(x_0)=0$, 则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的一个零点.

5. 复合函数零点问题的特点: 考虑关于 x 的方程 $g[f(x)]=0$ 根的个数, 在解此类问题时, 要分为两层来分析, 第一层是解关于 $f(x)$ 的方程, 观察有几个 $f(x)$ 的值使得等式成立; 第二层是结合着第一层 $f(x)$ 的值求出每一个 $f(x)$ 被几个 x 对应, 将 x 的个数汇总后即得 $g[f(x)]=0$ 的根的个数.

方法技巧:

求解复合函数 $y=g[f(x)]$ 零点问题的技巧:

(1) 此类问题与函数图像结合较为紧密, 在处理问题的开始要作出 $f(x), g(x)$ 的图像.

(2) 若已知零点个数求参数的范围, 则先估计关于 $f(x)$